

CAPITOLUL I

1.4. Ecuțiile diferențiale de echilibru ale eforturilor

Calculul mărimii eforturilor unitare și a forțelor de deformare se poate face prin integrarea ecuațiilor diferențiale de echilibru (la care se mai adaugă și alte relații), aplicate la un volum elementar ales arbitrar.

La stabilirea forțelor de prelucrare prin deformare se folosesc ecuațiile diferențiale de echilibru în coordonate carteziene, cilindrice și sferice, în funcție de operația la care se referă calculul. Astfel pentru cazul laminării produselor plate, ecuațiile diferențiale de echilibru ale eforturilor se vor da în coordonate carteziene, în cazul tragerii și extrudării produselor cu secțiune circulară, în coordonate cilindrice, iar pentru ambutisarea unui fund de recipient în coordonate sferice.

Stabilirea ecuațiilor diferențiale de echilibru în sistemul de coordonate carteziene

Determinarea ecuațiilor diferențiale de echilibru se face pe un volum paralelipipedic elementar cu laturile dx , dy , dz , tensiunile care acționează pe fețele paralelipipedului fiind prezentate în figura 1.6.

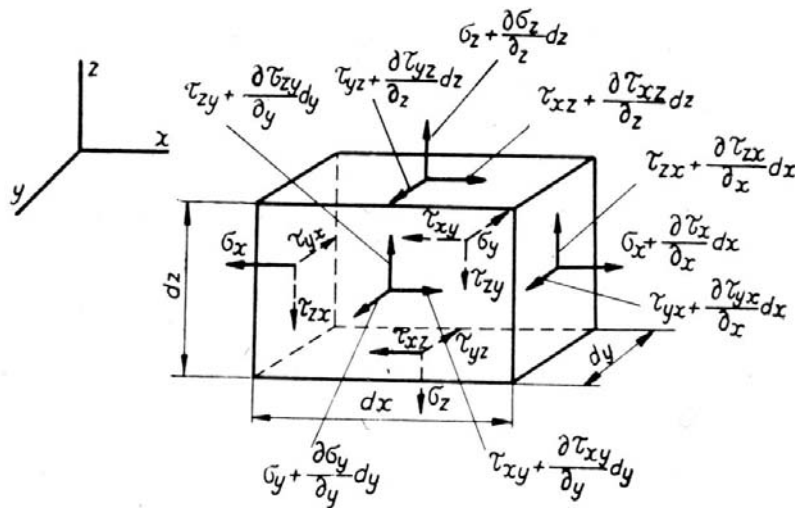


Fig.1.6

Considerăm elementul în echilibru și neglijând forțele de inerție proprii, suma forțelor care acționează pe fiecare direcție este nulă.

Făcând suma proiecțiilor forțelor pe axa x rezultă:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz \\
 & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dupa simplificare și împărțire cu dx , dy , dz se obține ecuația diferențială de echilibru în raport cu axa x de forma:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

Procedand similar pentru axele Oy si Oz rezulta:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

Stabilirea ecuațiilor diferențiale de echilibru în coordonate cilindrice

Se consideră un volum elementar într-un corp cilindric care are coordonatele ρ , θ si z . Variația eforturilor unitare pe suprafețele volumului considerat este prezentată în figura 1.7

Scriind ecuațiile de echilibru ale eforturilor în raport cu axele de coordonate se vor obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \tau_{\rho\theta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

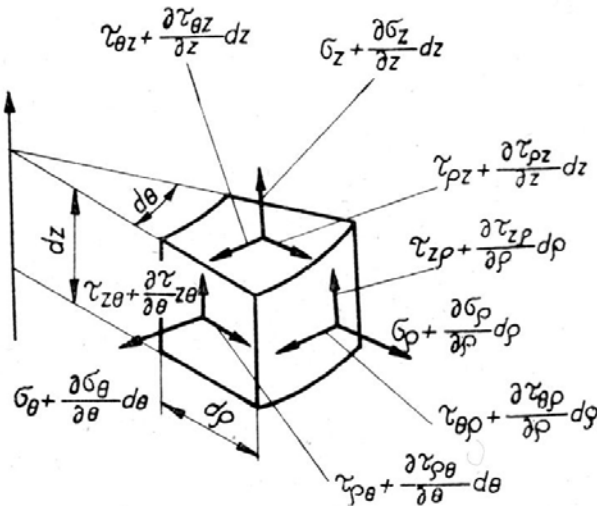


Fig.1.7

Stabilirea ecuațiilor diferențiale de echilibru în coordonate sferice

Se consideră un volum elementar într-un corp sferic determinat de coordonatele ρ, φ și θ conform figurii 1.8. Pentru cazurile practice se consideră că starea de eforturi unitare este simetrică față de axa z și mărimea eforturilor unitare nu depinde de unghiul θ . În acest caz se poate scrie că:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho} = 0$$

Ecuațiile diferențiale de echilibru în coordonate sferice au forma:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [2\sigma_{\rho} - (\sigma_{\varphi} + \sigma_{\theta}) + \tau_{\rho\varphi} \operatorname{ctg} \varphi] = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [3\tau_{\rho\varphi} + (\sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$
(1.11)

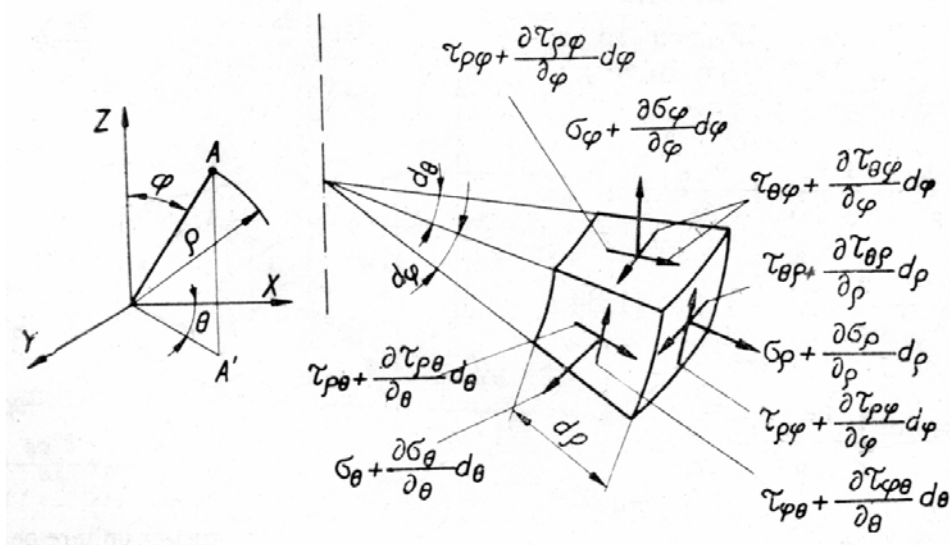


Fig.1.8

1.5. Eforturile unitare pe o suprafață înclinată față de axele de coordonate

Se consideră un paralelipiped care are 3 muchii paralele cu axele de coordonate x, y, z .

Secționând paralelipipedul cu un plan înclinat față de cele 3 axe, normala la această suprafață este înclinată față de axele de coordonate cu unghiurile $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ (Fig.1.9)[5].

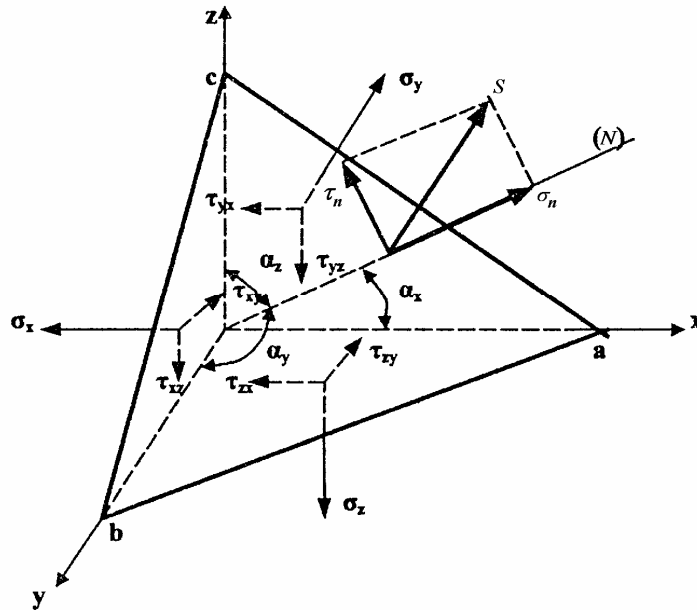


Fig.1.9

Cunoscandu-se eforturile $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ și $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, corespunzătoare suprafețelor aob, aoc, boc, se vor putea determina eforturile unitare și pe suprafața înclinată abc.

Pentru aceasta se notează suprafața abc cu ΔA , iar proiecțiile acesteia pe planele perpendiculare pe axe de coordonate cu $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ și tensiunea totală cu S .

Scriind ecuațiile de echilibru static pe direcția axelor de coordonate se obține :

$$S_x \Delta A - \sigma_x \Delta A_x - \tau_{xy} \Delta A_y - \tau_{xz} \Delta A_z = 0$$

$$S_y \Delta A - \tau_{yx} \Delta A_x - \sigma_y \Delta A_y - \tau_{yz} \Delta A_z = 0 \quad (1.12)$$

$$S_z \Delta A - \tau_{zx} \Delta A_x - \tau_{zy} \Delta A_y - \sigma_z \Delta A_z = 0$$

Efortul unitar total S care acționează pe suprafața înclinată ΔA poate fi scris în funcție de componentele sale astfel:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

Dar :

$$\Delta A_x = \Delta A \cos \alpha_x$$

$$\Delta A_y = \Delta A \cos \alpha_y$$

$$\Delta A_z = \Delta A \cos \alpha_z$$

Unde : $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ poartă numele de cosinusuri directoare ale suprafeței abc

Dacă se consideră $\Delta A=1$, după înlocuire în relația 1.12 se obține :

$$S_x = \sigma_x \cos \alpha_x + \tau_{xy} \cos \alpha_y + \tau_{xz} \cos \alpha_z \quad (1.13)$$

$$S_y = \tau_{yx} \cos \alpha_x + \sigma_y \cos \alpha_y + \tau_{yz} \cos \alpha_z$$

$$S_z = \tau_{zx} \cos \alpha_x + \tau_{zy} \cos \alpha_y + \sigma_z \cos \alpha_z$$

Efortul unitar normal pe suprafața înclinată este dat de proiecțiile componentelor S_x , S_y , S_z pe normala N , deci se poate scrie:

$$\sigma_n = S_x \cos \alpha_x + S_y \cos \alpha_y + S_z \cos \alpha_z \quad (1.14)$$

Cunoscând efortul unitar total S și efortul unitar normal σ_n , se va putea determina efortul tangențial total τ_n :

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 \quad (1.15)$$

$$\tau_n = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} \quad (1.16)$$

1.6. Eforturi unitare principale

În fiecare punct al corpului supus deformării se pot duce trei suprafețe perpendiculare între ele, unde eforturile unitare tangențiale sunt nule, din care cauză asupra lor acționează numai eforturi unitare normale (Fig.1.10).

Aceste suprafețe se numesc suprafețe principale, eforturile care acționează pe aceste suprafețe se numesc eforturi unitare normale principale (σ_1 , σ_2 , σ_3) și direcțiile lor se numesc direcții principale (1,2,3).

În aceste condiții eforturile unitare care acționează pe o suprafață înclinată față de axele principale pot fi exprimate astfel:

$$S_1 = \sigma_1 \cos \alpha_1$$

$$S_2 = \sigma_2 \cos \alpha_2 \quad (1.17)$$

$$S_3 = \sigma_3 \cos \alpha_3$$

$$S^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 \quad (1.18)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 \quad (1.19)$$

$$\tau_n = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} \quad (1.20)$$

unde:

α_1 , α_2 , α_3 sunt unghiurile pe care le face normala la suprafața înclinată, cu axele principale σ_1 , σ_2 , σ_3 .

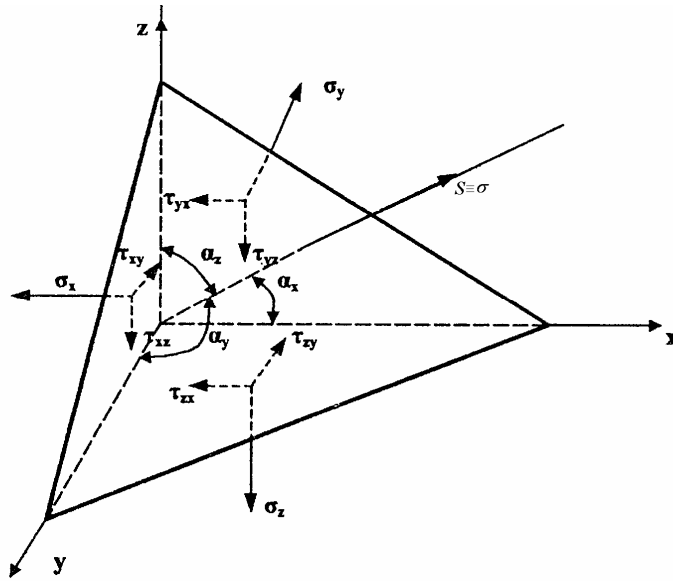


Fig.1.10

1.7.Eforturi unitare octaedrice

Dacă se consideră o suprafață a cărei normală este egal înclinată față de cele trei axe principale (Fig.1.11) aceasta este o suprafață octaedrică, iar eforturile unitare pe acea suprafață se numesc eforturi unitare octaedrice[5].

În aceste condiții:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = \cos \alpha \quad (1.21)$$

Din :

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \quad (1.22)$$

rezultă că:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

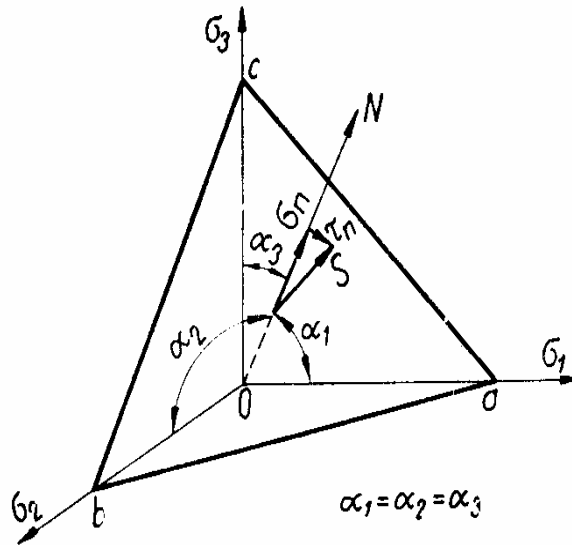


Fig.1.11

Înlocuind valorile cosinusurilor directe în relațiile 1.17...1.20, se obține:

$$S_{1oct} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}; S_{2oct} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}; S_{3oct} = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \quad (1.23)$$

$$S_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \quad (1.24)$$

$$\sigma_{oct} = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1.25)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \quad (1.26)$$

În relația de mai sus dezvoltând termenul al doilea de sub radical, se obține:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 9\tau_{oct}^2 \quad (1.27)$$

1.8. Reprezentarea variației tensiunilor

1.8.1. Elipsoidul lui Lamé

Pentru diferite inclinații ale suprafeței A, locul geometric al vârfului vectorului S reprezintă un elipsoid.

Notând cu S_x, S_y, S_z , proiecțiile vectorului S, în funcție de tensiunile principale, acestea vor fi:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_1 \cos \alpha_1 = x \\ S_y &= \sigma_2 \cos \alpha_2 = y \\ S_z &= \sigma_3 \cos \alpha_3 = z \end{aligned} \quad (1.28)$$

Prin ridicare la patrat, impartire cu tensiunile $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ si insumare rezulta:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (1.29)$$

deoarece

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

Relatia 1.29 reprezinta un elipsoid, care are centrul in punctul de intersectie al axelor de coordonate iar semiaxele sale sunt egale cu marimea tensiunilor principale(Fig.1.12).

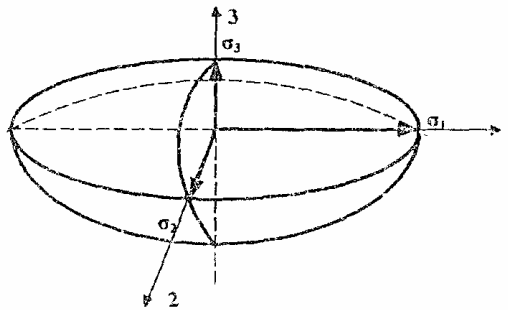


Fig.1.12 Elipsoidul lui Lamé

Din aceasta reprezentare rezulta urmatoarele:

- daca doua tensiuni sunt egale intre ele atunci elipsoidul se transforma intr-un elipsoid de rotatie;
- daca toate tensiunile principale sunt egale intre ele($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$), elipsoidul se transforma intr-o sfera; in acest caz starea de tensiuni se numeste hidrostatica sau sferica;
- daca una dintre tensiunile principale este nula, elipsoidul devine o elipsa corespunzatoare unei stari plane de tensiuni;
- daca doua din tensiunile principale sunt nule elipsoidul se reduce la o linie care corespunde starii liniare de tensiune.

1.8.2. Cercul lui Mohr

Dependenta dintre tensiunile tangentiale si cele normale principale se poate obtine pe cale grafica printr-o constructie geometrica numita cercul lui Mohr. Aceasta constructie grafica permite studiul variatiei eforturilor unitare pe sectiuni inclinate fata de axele de coordonate.

Anterior s-a aratat ca:

$$S^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3$$

dar:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

Rezulta ca:

$$\cos^2 \alpha_3 = 1 - (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2)$$

Deci:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 - \sigma_1^2 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) \quad (1.30)$$

sau

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_3^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \cos^2 \alpha_1 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \cos^2 \alpha_2 \quad (1.31)$$

iar

$$\sigma_n - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_3) \cos^2 \alpha_2 \quad (1.32)$$

Daca se inmulteste ecuatia 1.32 cu $-(\sigma_2 + \sigma_3)$ si se aduna membru cu membru cu ecuatia 1.31, dupa simplificari se va obtine:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha_1 \quad (1.33)$$

si identic

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \alpha_2 \quad (1.34)$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) = (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \cos^2 \alpha_3$$

Considerand cazul particular cand $\cos \alpha = 0 (\alpha = \pi/2)$, relatia 1.32 devine:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad (1.35)$$

sau sub o alta forma:

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (1.36)$$

Intr-un sistem de coordonate σ - τ relatia 1.36 reprezinta un cerc de raza $r_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ cu

centrul O_{23} pe axa absciselor la distanta $a_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$, fata de origine.

Similar se demonstreaza ca relatiile 1.34 reprezinta tot cercuri. Aceste cercuri se numesc cercurile lui Mohr. Ele sunt construite in ipoteza ca: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Reprezentarea acestor cercuri este data in figura 1.13.

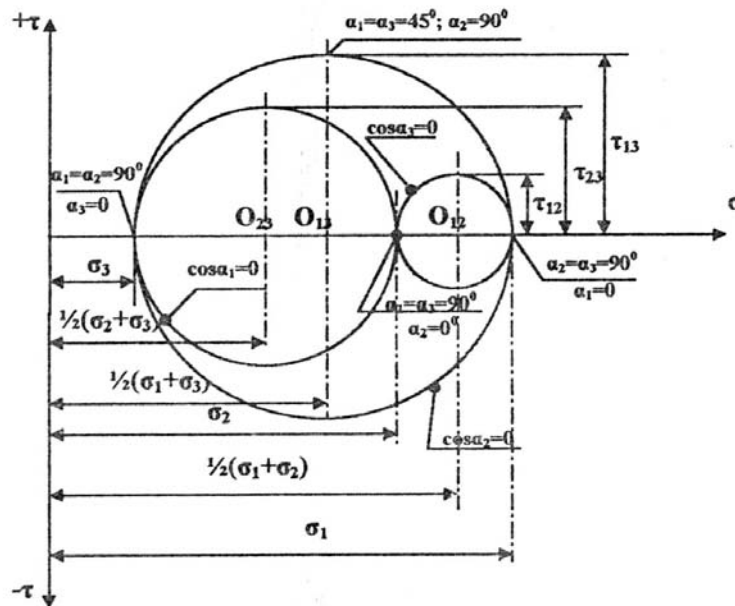


Fig.1.13 Reprezentarea grafica a cercurilor lui Mohr

Examinand constructia grafica a cercurilor lui Mohr se observa urmatoarele:
 -abscisele extremitatilor cercurilor reprezinta marimile tensiunilor principale pentru care tensiunile tangentiale sunt nule.
 -valorile maxime ale ordonatelor corespund tocmai tensiunilor tangentiale maxime:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \\ \tau_{23} &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{13} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \end{aligned} \tag{1.37}$$

Aceste tensiuni se numesc tensiuni tangentiale principale si lor le corespund tensiunile normale ale caror valori sunt:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$$

-cu valorile tensiunilor tangentiale maximesi ale tensiunilor normale corespunzatoare se pot determina cosinusurile directe care definesc planele pe care actioneaza tensiunile tangentiale maxime, date in tabelul de mai jos:

Valorile cosinusurilor directe ale planelor pe care actioneaza tensiuni tangentiale maxime

$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$	τ_{\max}
0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Deoarece prin convenție, se considera $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ rezulta ca:

$$\tau_{13} = \tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.38)$$

Din analiza cercurilor lui Mohr, se pot face urmatoarele observatii:

-daca tensiunile principale ce actioneaza asupra unui volum elementar sunt egale intre ele, tensiunile tangentiale corespunzatoare sunt nule iar cercurile lui Mohr devin un punct situat chiar in originea axelor de coordonate;

-suma tensiunilor tangentiale maxime este nula:

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = 0$$

1.10. Starea de eforturi unitare in plan

Pentru rezolvarea problemelor practice, sunt folosite destul de frecvent relațiile eforturilor, considerate în starea de eforturi unitare plană. In acest caz sunt respectate condițiile:

$$\sigma_y = 0; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0$$

Distribuția eforturilor în cazul stării de eforturi unitare plană este prezentată în figura 1.15[5].

Componentele efortului unitar total S pe cele două axe x și z vor fi:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \alpha_x + \tau_{xz} \cos \alpha_z \\ S_z &= \tau_{zx} \cos \alpha_x + \sigma_z \cos \alpha_z \end{aligned} \quad (1.46)$$

Deoarece $\alpha_z = \frac{\pi}{2} - \alpha_x$ rezultă că $\cos \alpha_z = \sin \alpha_x$, relația 1.46 devenind:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \alpha_x + \tau_{xz} \sin \alpha_x \\ S_z &= \tau_{xz} \cos \alpha_x + \sigma_z \sin \alpha_x \end{aligned} \quad (1.47)$$

Exprimand componentele S_x și S_z în funcție de eforturile unitare normale principale vom avea:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 \cos \alpha_1 \\ S_3 &= \sigma_3 \sin \alpha_1 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Efortul unitar total, pe suprafața înclinată va fi:

$$S^2 = S_x^2 + S_z^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha_x + \sigma_z^2 \sin^2 \alpha_x + (\sigma_x + \sigma_z) \tau_{xz} \sin 2\alpha_x + \tau_{xz}^2 \quad (1.49)$$

sau exprimand în funcție de eforturile unitare normale principale :

$$S^2 = S_1^2 + S_3^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_1 \quad (1.50)$$

Efortul unitar normal pe suprafața înclinată va fi:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha_x + \sigma_z \sin^2 \alpha_x + \tau_{xz} \sin 2\alpha_x \quad (1.51)$$

sau în funcție de eforturile unitare normale principale:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_1 \quad (1.52)$$

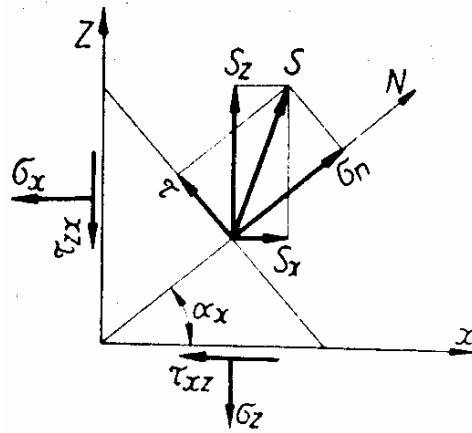


Fig.1.15

Efortul unitar tangențial pe suprafața înclinată va fi:

$$\tau = \pm \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha_x + \tau_{xz} \cos 2\alpha_x \quad (1.53)$$

sau

$$\tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha_1 \quad (1.54)$$

Eforturile unitare normale principale pot fi exprimate în funcție de eforturile unitare σ_x , σ_z și τ_{xz} rezolvându-se determinantul 1.43, care în cazul stării de eforturi unitare plane devine:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând determinantul de mai sus se obține:

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2 = 0 \quad (1.55)$$

Din ecuația 1.55 rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad (1.56)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

Dacă scădem σ_3 din σ_1 și ridicăm la pătrat se obține:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 \quad (1.57)$$

Dacă se consideră că normala N din figura 1.15 este axa x a unui nou sistem de axe de coordonate, iar axele x și z existente vor fi axe principale (σ_1 - σ_2), pe baza relației 1.52, σ_x va fi egal cu σ_n , deci se va putea scrie:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_1 \quad (1.58)$$

Deoarece:

$$\cos^2 \alpha_1 = \frac{1 + \cos 2\alpha_1}{2}$$

și

$$\sin^2 \alpha_1 = \frac{1 - \cos 2\alpha_1}{2}$$

expresia 1.58 poate fi scrisă și astfel:

$$\sigma_x = \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha_1}{2} + \sigma_3 \frac{1 - \cos 2\alpha_1}{2} \quad (1.59)$$

sau

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha_1 \quad (1.60)$$

Similar:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha_1 \quad (1.61)$$

Făcând notațiile:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_{med}$$

și

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k$$

atunci pe baza relațiilor 1.60, 1.61, 1.54, se vor putea exprima σ_x , σ_z , τ_{xz} astfel:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{med} k \cos 2\alpha_1 \\ \sigma_z &= \sigma_{med} - k \cos 2\alpha_1 \\ \tau_{xz} &= \pm k \sin 2\alpha_1 \end{aligned} \quad (1.62)$$

1.12. STAREA DE DEFORMARE

Prin starea de deformare se înțelege totalitatea modificărilor geometrice ce apar într-un corp supus acțiunii forțelor exterioare și care caracterizează schimbarea formei corpului în timpul deformării.

Modificările geometrice ce apar în timpul deformării pot fi liniare și unghiulare. Când deformațiile sunt egale în toate punctele corpului, starea de deformare este omogenă, iar când deformațiile diferă de la un punct la altul starea este neomogenă.

În practică stările de deformare sunt neomogene datorită variației tensiunii, temperaturii, proprietăților, etc. Pentru simplificarea calculelor, considerând volume mici în interiorul corpului supus deformării se pot accepta stări de deformare uniforme.

Pentru analiza stării de deformare se consideră ca punctele aflate în interiorul corpului supus deformării fac parte din paralelipede elementare. În urma deformării aceste

paralelipede isi vor schimba pozitia, lungimile laturilor si unghiurile dintre acestea(Fig.1.18).

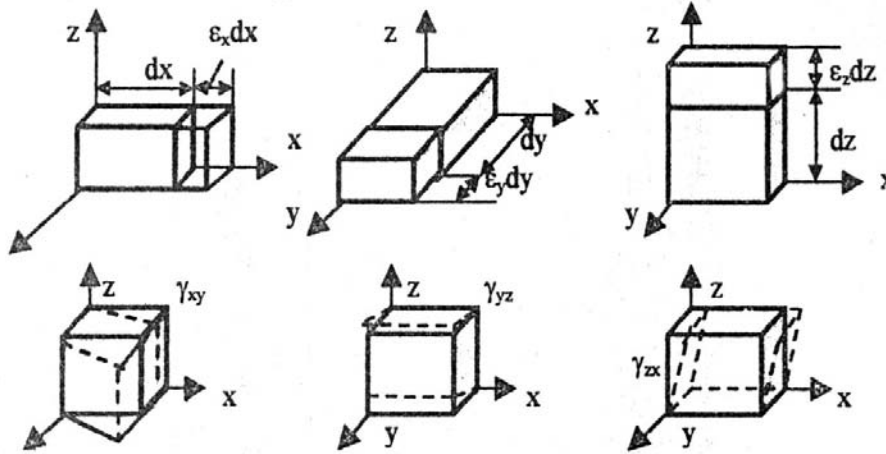


Fig.1.18

Proiectand un paraleliped elementar pe cele 3 plane ale unui sistem cartezian $xOyz$ (Fig.1.19) se poate simplifica analiza starii spatiale de deformatii prin analiza proiectiilor plane(Fig. 1.20)

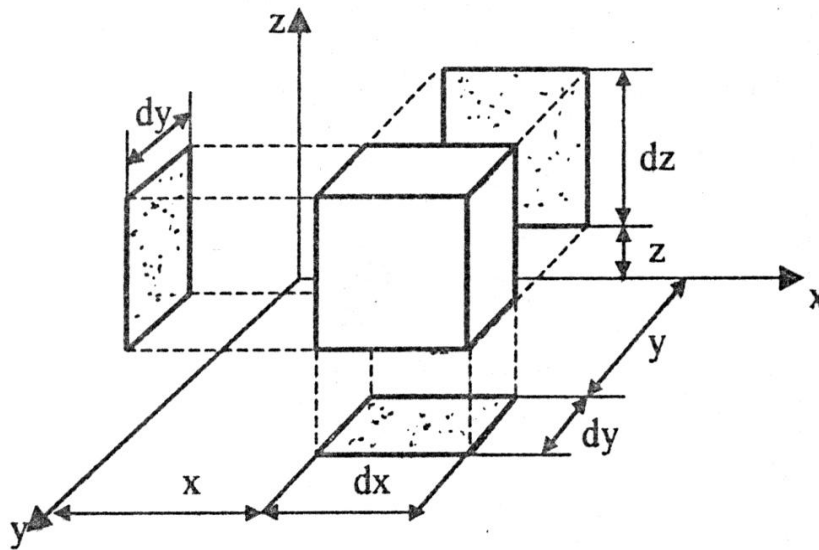


Fig. 1.19

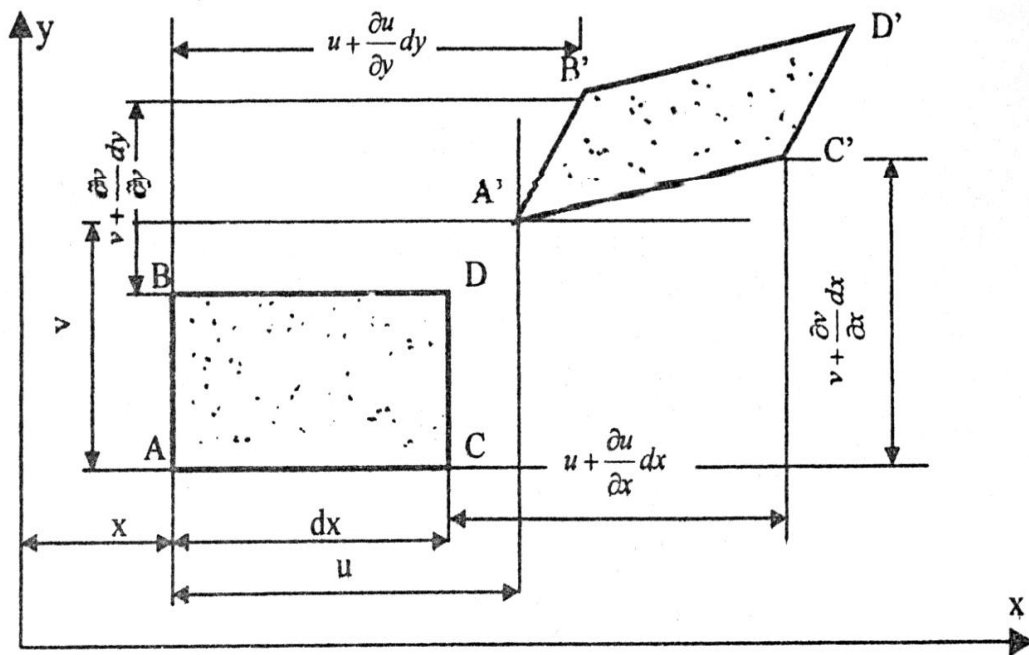


Fig.1.20

Din analiza deformării proiectiei paralelipipedului în planul xOy (Fig.1.18) se observă că dreptunghiul $ABCD$ se deplasează într-o nouă poziție, A', B', C', D' . Deplasările de-a lungul axei Ox se notează cu u , cele de-a lungul axei Oy cu v , iar de-a lungul axei Oz cu w . Dacă punctul A s-a deplasat cu distanța u , punctul C se va deplasa cu creșterea elementară $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ș.a.m.d. Pentru determinarea deformațiilor liniare și unghiulare specifice se analizează figura 1.21.

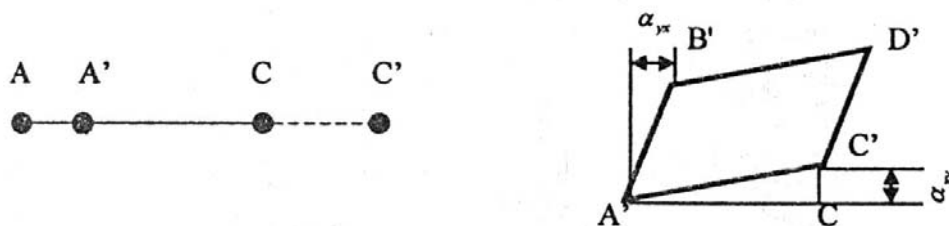


Fig.1.21

Pe baza fig. 1.21 deformatia relativă paralelă cu axa Ox este:

$$\epsilon_x = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.63)$$

Notand cu γ_{xy} deformatia unghiulara a unui unghi drept(deformatie specifica) , din considerente geometrice se obtine:

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} \quad (1.64)$$

Unghiurile α_{xy} si α_{yx} se obtin din relatiile:

$$\operatorname{tg} \alpha_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.65)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{yx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.66)$$

Considerand ca deformatiile sunt mici, se admite ca $\operatorname{tg} \alpha_{xy} \cong \alpha_{xy}$ si $\operatorname{tg} \alpha_{yx} \cong \alpha_{yx}$.

Pe baza celor de mai sus se obtine valoarea totala a deformatiei unghiulare specifice:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \quad (1.67)$$

In mod similar se pot obtine deformatiile specifice liniare si unghiulare din celelalte plane:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ si } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.68)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \quad (1.69)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \quad (1.70)$$

1.13. TENSORUL SI DEVIATORUL STARII DE DEFORMARE

Din cele prezentate mai sus rezulta ca deformatia unui element de volum dintr-un corp supus deformatiei poate fi determinata complet daca se cunosc 9 componente: 3 deformatii liniare ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) si 6 deformatii unghiulare ($1/2\gamma_{xy}, 1/2\gamma_{yx}, 1/2\gamma_{xz}, 1/2\gamma_{zx}, 1/2\gamma_{yz}, 1/2\gamma_{zy}$) egale doua cate doua.

Starea de deformare din jurul unui punct dintr-un corp supus deformatiei poate fi reprezentata printr-un tensor similar tensorului eforturilor unitare:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (1.71)$$

In mod analog starii de tensiune si pentru starea de deformare exista un sistem de axe de coordonate in lungul carora nu exista deformatii unghiulare. In acest caz deformatiile

liniare se numesc principale si se noteaza cu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Starea de deformare in acest caz poate fi exprimata printr-un tensor in care deformatiile unghiulare sunt nule.

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \quad (1.72)$$

In cazul in care deformatia liniara pe o directie corespunde deformatiei medii, se poate scrie:

$$\varepsilon_{med} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (1.73)$$

In acest caz starea de deformare se exprima prin tensorul sferic al deformarii:

$$T_\varepsilon^0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{med} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{med} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{med} \end{vmatrix} \quad (1.74)$$

Deformatia descrisa de tensorul sferic se refera numai la variatia de volum. Daca in timpul deformarii volumul ramane constant, atunci suma deformatiilor pe cele trei directii este nula si deci deformarea medie liniara va fi si ea nula. In acest caz si tensorul sferic al deformatiei va fi egal cu zero.

Similar starii de tensiune se poate scrie deviatorul deformatiilor:

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{med} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{med} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{med} \end{vmatrix} \quad (1.75)$$

Deviatorul deformatiilor reprezinta partea din deformatia elementului de volum care se refera numai la schimbarea formei. Deoarece $T_\varepsilon^0 = 0$, rezulta ca valoarea deviatorului deformatiei este egala cu valoarea tensorului deformatiei, adica $D_\varepsilon = T_\varepsilon$.

1.14. SCHEMELE STARII DE DEFORMARE

Schemele starii de deformare reprezinta totalitatea combinatiilor posibile a se realiza, folosind deformatiile principale care actioneaza pe fetele unui element de volum. Daca in timpul deformarii plastice volumul ramane constant, intre deformatiile principale exista relatia:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (1.76)$$

Din analiza acestei relatii se observa ca nu pot exista stari de deformare la care deformatiile principale sa aiba acelasi semn. Rezulta deci ca intotdeauna deformatia principala maxima este egala cu semisuma celorlalte doua deformatii principale (Fig. 1.22).

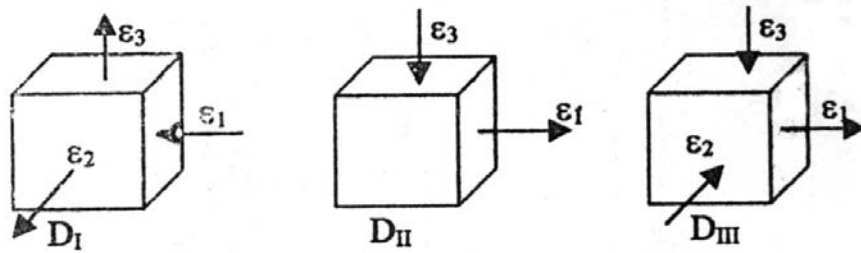


Fig.1.22 Schemele starii de deformatii

Din punct de vedere a plasticitatii materialului, cea mai favorabila este schema D_{III} si cea mai nefavorabila este schema D_I.

CAPITOLUL 2

ELEMENTE MATEMATICE ALE PLASTICITATII

2.1. Relatii intre tensiuni si deformatii

Cele mai simple relatii de legatura intre tensiuni si deformatii apar in cazul sollicitarilor liniare din domeniul elastic:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{si} \quad \tau = G\gamma \quad (2.1)$$

unde:

E este modulul de elasticitate longitudinal,

G, modulul de elasticitate transversal.

Deformatia liniara care apare pe directia fortei aplicate asupra corpului este insotita si de o deformatie transversala(Fig.2.1).

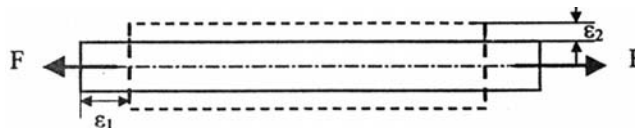


Fig.2.1. Contractia transversala care apare la sollicitarea liniara

Intre contractia transversala ε_2 si deformatia liniara ε_1 exista relatia:

$$\varepsilon_2 = \nu\varepsilon_1 \quad (2.2)$$

unde ν este coeficientul lui Poisson

$\nu=0,25$ pentru un corp ideal elastic,

$\nu=0,33$ pentru materiale metalice.

Intre modulul de elasticitate longitudinal E si tangential G exista relatia:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Daca se neglijeaza coeficientul lui Poisson ($\nu = 0,3$) se vede ca:

$$E \approx 2G$$

Deformatia medie este:

$$\varepsilon_{med} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

corespunzatoare tensiunii medii:

$$\sigma_{med} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Pentru a scrie relatiile intre tensiuni si deformatii pentru cazul general(3 tensiuni principale si 3 deformatii) se aplica legea lui Hooke generalizata, enuntata astfel: "Deformatia specifica in lungul unei axe principale apare atat datorita actiunii directe a tensiunii de pe axa respectiva, cat si actiunii indirecte a deformatiilor transversale datorita tensiunilor ce actioneaza pe celelalte doua directii principale".

Pe baza acestei legi, pentru deformatiile principale se poate scrie:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)}{E} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} \quad (2.5)$$

Relatiile intre tensiunile tangentiale si deformatiile specifice pot fi scrise sub forma:

$$\tau_{12} = G\gamma_{12}; \quad \tau_{13} = G\gamma_{13}; \quad \tau_{23} = G\gamma_{23} \quad (2.6)$$

Din relatiile de mai sus se observa ca in domeniul elastic intervin 3 constante E, G si ν , legate intre ele prin:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

Adunand membru cu membru relatiile (2.3), (2.4), (2.5) se obtine deformatia volumica:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.8)$$

sau

$$\varepsilon_v = \frac{3\sigma_{med}}{E}(1-2\nu) \quad (2.9)$$

Daca se scade ε_2 din ε_1 si ε_3 din ε_1 si ε_2 se obtin relatiile:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_2 - \sigma_3) \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_3 - \sigma_1) \quad (2.12)$$

Ultimele trei relatii pot fi scrise si sub forma:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \quad (2.13)$$

Pentru stabilirea relatiilor de legatura intre tensiuni si deformatii pentru domeniul plastic, se pun conditiile: directiile deformatiilor principale sa coincida cu directiile tensiunilor normale principale; volumul corpului sa nu se modifice in timpul deformarii.

Pe baza celor de mai sus se poate scrie:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (2.14)$$

Din relatiile(2.9) si (2.14) rezulta $\nu = 0,5$

Deci valoarea coeficientului lui Poisson poate caracteriza comportarea unui material metalic:

$\nu = 0,25$ pentru un material ideal elastic;

$\nu = 0,5$ pentru un material ideal plastic.

Tinand cont ca $\frac{E}{1+\nu} = 2G$, pentru $\nu = 0,5$ se obtine :

$$E_{pl} = 3G_{pl} \quad (2.15)$$

In domeniul elastic mai pot fi scrise si urmatoarele relatii :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_{med} = \frac{1}{2G}(\sigma_1 - \sigma_{med}) \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_{med} = \frac{1}{2G}(\sigma_2 - \sigma_{med}) \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_{med} = \frac{1}{2G}(\sigma_3 - \sigma_{med}) \quad (2.18)$$

Relatiile (2.16), (2.17), (2.18) pot fi scrise si pentru domeniul plastic daca se tine cont ca $G \rightarrow G_{pl}$ iar $\varepsilon_{med} = 0$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2G_{pl}}(\sigma_1 - \sigma_{med}) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2G_{pl}}(\sigma_2 - \sigma_{med}) \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2G_{pl}}(\sigma_3 - \sigma_{med}) \quad (2.21)$$

Relatiile (2.19), (2.20), (2.21) pot fi scrise si sub forma:

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_{med}} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2 - \sigma_{med}} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3 - \sigma_{med}} \quad (2.22)$$

Daca se scrie:

$$\sigma_1 - \sigma_{med} = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2}{3}(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}) \quad (2.23)$$

$$\sigma_2 - \sigma_{med} = \frac{2}{3}(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}) \quad (2.24)$$

$$\sigma_3 - \sigma_{med} = \frac{2}{3}(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}) \quad (2.25)$$

Inlocuind ultimele trei relatii in (2.19), (2.20), (2.21) se obtine:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3G_{pl}} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3G_{pl}} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{3G_{pl}} \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \quad (2.28)$$

Relatiile (2.26), (2.27), (2.28) permit calculul deformatiilor principale atunci cand se cunosc tensiunile principale.

Starea plana de deformare

Daca pe una dintre directiile perpendiculara pe celelalte doua, deformatia este blocata, se spune ca starea de deformare este plana.

Astfel daca $\varepsilon_2=0$, din legea constantei volumului pentru starea plana de deformare se poate scrie relatia:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \text{ de unde } \varepsilon_1 = -\varepsilon_3 \quad (2.29)$$

Exprimand si in acest caz deformatia medie si tensiunea medie vom avea:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon = \frac{\psi}{2G} (\sigma_2 - \sigma) \quad (2.30)$$

$$\text{Dar: } \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \quad \text{iar } \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Inlocuind in (3.47) rezulta:

$$\frac{\psi}{2G} \left[\sigma_2 - \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] = 0 \quad (2.31)$$

deoarece $\varepsilon_2 = 0$ prin ipoteza, iar $\varepsilon = 0$ din legea constantei volumului.

Din relatia (2.31) deoarece $\frac{\psi}{2G} \neq 0$ rezulta ca:

$$\sigma_2 - \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0$$

de unde

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (2.32)$$

Relatia (2.32) demonstreaza ca pe o directie chiar daca deformatia este zero, tensiunea pe acea directie nu dispare ci are o valoare egala cu semisuma celorlalte doua tensiuni.

2.2 Energia specifica si puterea disipata prin deformare plastica

Pentru a calcula energia necesara deformarii se considera cazul starii liniare de tensiuni ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$). In acest caz energia potentiala de deformare este egala cu lucrul mecanic efectuat pentru deformare.

Lucrul mecanic elementar pentru deformare va fi:

$$dL_e = \sigma A dl = \sigma V \frac{dl}{l} = \sigma V d\varepsilon \quad (2.33)$$

Lucrul mecanic specific, necesar deformarii unitatii de volum este:

$$dL = \frac{dL_e}{V} = \sigma d\varepsilon \quad (2.34)$$

Dar $\sigma = E\varepsilon$ si deci:

$$\int_0^{\varepsilon_1} dL = \int_0^{\varepsilon_1} E \varepsilon d\varepsilon \quad (2.35)$$

$$\text{De unde : } L_1 = E \frac{\varepsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} \quad (2.36)$$

In cazul general al unei starii spatiale de tensiuni, lucrul specific de deformare va fi:

$$L = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (2.37)$$

Inlocuind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ din legea generalizata a lui Hooke va rezulta:

$$L = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) \quad (2.38)$$

Lucrul mecanic dat de relatia (2.38) cuprinde in general 2 componente: o componenta pentru modificarea volumului si o componenta pentru modificarea formei:

$$L = L_v + L_f \quad (2.39)$$

$$\text{de unde } L_f = L - L_v \quad (2.40)$$

L_v se determina tinand cont de tensiunile si deformatiile medii, conform figurii 2.2 tinand cont de tensiunile si deformatiile medii.

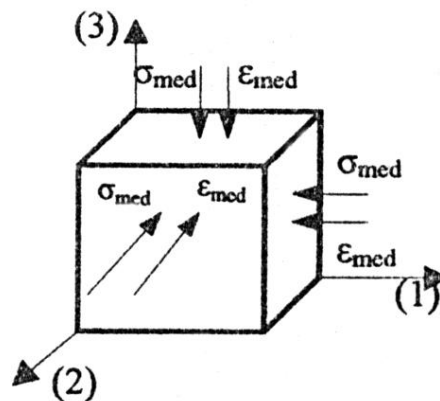


Fig. 2.2 Schema grafica pentru determinarea lucrului mecanic de modificare a volumului

$$L_v = 3 \frac{1}{2} \sigma_{med} \varepsilon_{med} \quad (2.41)$$

sau

$$L_v = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_{med}^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.42)$$

Se obtine astfel prin inlocuire :

$$L_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.43)$$

Puterea specifica disipata in procesul de deformare se calculeaza raportand lucrul mecanic specific de deformare la un interval de timp infinit mic , cand sub actiunea unei tensiuni σ se produce o variatie a gradului de deformare.

$$P = \frac{dL}{dt} = \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma \dot{\varepsilon} \quad (2.44)$$

In cazul unei stari spatiale se obtine:

$$P = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \quad (2.45)$$

2.3 Metode pentru analiza proceselor de deformare plastica

In procesele de deformare plastica, fortele de deformare sunt create de utilaje si transmise semifabricatului prin intermediul sculelor. Sub actiunea acestor forte corpul isi modifica forma si dimensiunile.

Cunoasterea marimii fortelor de deformare este necesara pentru alegerea corecta a utilajului si pentru dimensionarea sculelor.

Cateva dintre metodele utilizate pentru determinarea fortelor de deformare sunt prezentate mai jos:

1. Metoda elementului de volum (slebului) consta in calculul tensiunilor prin integrarea ecuatiilor diferentiale de echilibru. In acest scop se va considera o stare de tensiune simplificata, care considera ca tensiunile din corpul supus deformarii sunt dependente doar de o singura directie. Astfel sistemul de ecuatii diferentiale de echilibru se reduce la una singura, care va contine in locul derivatelor partiale numai derivate obisnuite.

Metoda consta in delimitarea unui volum de lungime finita si de grosime infinit mica asupra caruia actioneaza tensiuni necunoscute. Din ecuatia de echilibru a fortelor care actioneaza asupra elementului de volum se deduce ecuatia diferentiala de echilibru, care va fi baza pentru determinarea in continuare de fortelor de deformare.

Aceasta metoda prezinta si unele dezavantaje legate de faptul ca gradientele de tensiuni si deformatii sunt luate in considerare doar pe o singura directie si se presupune ca sunt uniforme pe directia perpendiculara. De aici rezulta precizia relativ redusa a rezultatelor obtinute. Cu toate acestea, metoda elementului de volum este o cale rapida de determinare a unei forte aproximative de deformare si de estimare a deformarii in probleme plane pentru corpuri axial-simetrice. Metoda este des folosita in cazul multor procese de deformare (laminare, forjare libera, extrudare).

Aplicarea metodei elementului de volum pentru determinarea fortei de deformare la refularea semifabricatelor cilindrice

Se considera un semifabricat cilindric cu diametrul d si inaltimea h supus deformarii prin refulare intre doua scule plan-paralele. Piesa fiind simetrica starea de tensiuni este aceeaasi in orice plan axial si de aceea se poate considera ca fiind o stare plana (Fig. 2.3)

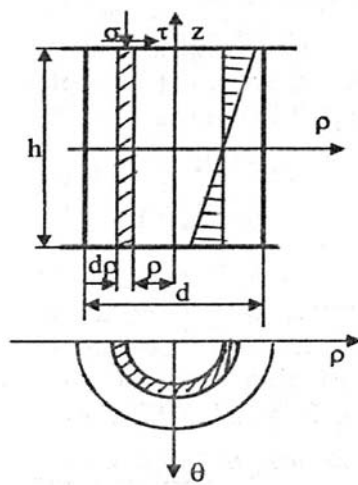


Fig. 2.3 Starea de tensiuni la refularea între scule plan-paralele a unui semifabricat cilindric

Pentru calculul forței de deformare se pleacă de la ecuația diferențială de echilibru în coordonate cilindrice, scrisă de-a lungul axei ρ :

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}) = 0 \quad (2.46)$$

Datorită simetriei axiale se poate scrie:

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.47)$$

Presupunând că efortul tangential variază liniar pe înălțimea semifabricatului se poate scrie:

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} = \frac{2\tau}{h} \quad (2.48)$$

Dacă deformările sunt mici se poate admite că:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\rho} \quad (2.49)$$

Înlocuind relațiile (2.47), (2.48), (2.49) în relația (2.46) se obține:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{2\tau}{h} = 0 \quad (2.50)$$

Considerând că tensiunile din corpul supus deformării sunt dependente doar de o singură direcție și se presupune că sunt uniforme pe direcția perpendiculară pe aceasta, relația (2.50) se poate scrie sub formă:

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \frac{2\tau}{h} = 0 \quad (2.51)$$

Ținând cont de ecuația diferențială a plasticității, putem scrie:

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} = \frac{d\sigma_z}{d\rho} \quad (2.52)$$

Înlocuind în relația (2.51) rezultă:

$$d\sigma_z = -\frac{2\tau}{h}d\rho \quad (2.53)$$

Legea de distributie a efortului tangential τ pe suprafata de contact se adopta sub forma:

$$\tau = \mu 2k \quad (2.54)$$

Prin integrarea relatiei (2.53), tinand cont de relatia (2.54) se obtine:

$$\sigma_z = -\frac{4\mu k}{h}\rho + C \quad (2.55)$$

Determinarea constantei C de integrare se face din conditii la limita(pe contur):

$$\text{La } \rho=d/2 \text{ avem } \sigma_z=2k \text{ si deci } \sigma_z = 2k + \frac{4\mu k}{h} \frac{d}{2}$$

Dupa inlocuirea constantei C in relatia (2.55) si ordonarea termenilor, se obtine:

$$\sigma_z = 2k \left[1 + \frac{2\mu}{h} \left(\frac{d}{2} - \rho \right) \right] \quad (2.56)$$

Fora totala de deformare se obtine integrand expresia:

$$F = \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi\rho d\rho \quad (2.57)$$

Prin inlocuirea lui σ_z si rezolvarea integralei, rezulta:

$$F = 2k \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\mu d}{h} \right) \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.58)$$

unde $\frac{\pi d^2}{4} = A$ este aria sectiunii transversale a semifabricatului deformat

Relatia (2.58) poarta denumirea de relatia lui Siebel.

CAPITOLUL 3

MECANISMUL DEFORMĂRII PLASTICE

3.1.Considerații privind structura materialelor metalice

Materialele cristaline se împart în două grupe: monocristaline și policristaline. Monocristaline sunt considerate materialele în care întregul volum al metalului are un singur cristal. Materialele policristaline sunt formate dintr-un număr mare de cristale denumite grăunți.

Incărcările experimentale demonstrează faptul că structura internă a monocristalelor nu este perfect ideală(Fig.3.1 a) ci este formată din blocuri(subgrăunți) cu dimensiuni între $10^{-4} \dots 10^{-6}$ cm(Fig. 3.1 b). Blocurile individuale sunt orientate diferit (deviația varind de la unghiuri de cateva secunde la un minut)[1].

In materialele policristaline graunții individuali sunt de diferite mărimi și forme fiind în același timp reciproc orientate diferit(Fig.3.1 c).Acest fapt se datorește creșterii grăunților individuali din diferiți germeni.

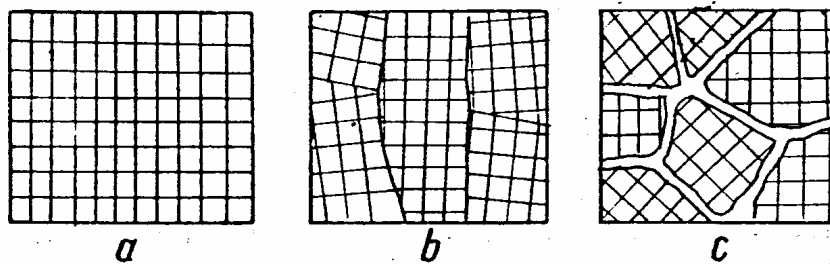


Fig.3.1

Transformarea structurii corpurilor metalice în urma deformării lor plastice are ca efect modificarea proprietăților fizice și de rezistență ale acestora.

Majoritatea metalelor cristalizează în trei tipuri de rețea:

1. rețea cubică cu volum centrat(CVC) (Fig.3.2a)
2. rețea cubică cu fețe centrate(CFC)(Fig.3.2 b)
3. rețea hexagonală compactă(HC) (Fig.3.2c)

Structura cristalină	Metale cu o singură structură	Metale cu mai multe structuri în funcție de temperatură
Rețea cubică cu fețe centrate(CFC)	Aluminiu(Al) Nichel (Ni) Cupru(Cu) Argint(Ag) Platina(Pt) Aur(Au) Plumb(Pb)	Fier(Fe) 911-1392 ⁰ C
Rețea cubică cu volum centrat(CVC)	Vanadiu(V) Crom (Cr) Niobiu(Nb) Molibden(Mo) Tantal(Ta) Wolfram(W)	Fier(Fe) Titan(Ti) > 882 ⁰ C Zirconiu(Zr)>852 ⁰ C
Rețea hexagonală compactă(HC)	Beriliu(Be) Magneziu(Mg) Zinc(Zn)	Titan(Ti)<882 ⁰ C Cobalt(Co)<1120 C Zirconiu(Zr)<852 C Hafniu(Hf)<1975 C

Imperfecțiuni în cristalele metalice

Din punct de vedere a structurii interne a materialelor metalice se poate considera ca defect al rețelei cristaline orice punct nodal care nu este ocupat de particule cum ar fi cel ideal.

Defectele pot fi clasificate în trei grupe:

1. Chimice, care apar în cazul în care periodicitatea structurii cristaline este tulburată în punctele nodale de particulele proprii sau străine, sau de către particulele străine aflate în pozițiile interstițiale.
2. Structurale, care se caracterizează prin abateri de la organizarea geometrică precisă a particulelor din punctele nodale ale rețelei cristaline.

3. Electrice, care sunt defecte sub formă de abateri de la evoluția periodică precisă a potențialului electric.

Celulele elementare prezentate mai sus reprezintă o structură ideală a metalelor. În organizarea spațială a atomilor, în rețeaua cristalină a metalelor apar o serie de abateri geometrice, imperfecțiuni în așezarea lor, ceea ce explică o serie de fenomene legate de caracteristicile mecanice ale materialelor. Imperfecțiunile structurale din rețeaua cristalină pot fi grupate în imperfecțiuni punctiforme și imperfecțiuni liniare.

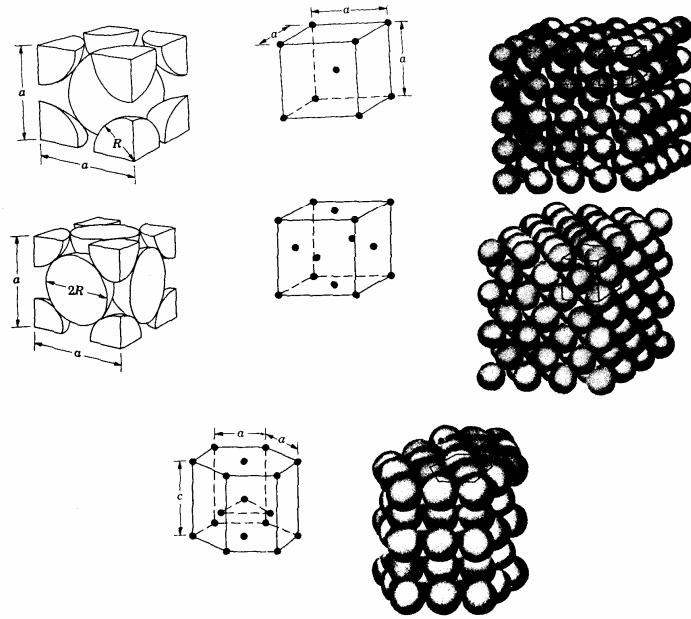


Fig.3.2

Imperfecțiunile punctiforme pot fi împărțite în trei categorii:

1. vacanțele, care constau în lipsa atomilor dintr-o poziție de echilibru (fig.3.3 a)
2. atomi interstițiali, care se găsesc între alți atomi aflați în poziție de echilibru în rețeaua cristalină (fig.3.3 b)
3. atomi de substituție, care reprezintă atomi străini ce înlocuiesc în rețea atomii metalului de bază (fig.3.3 c)

Atat vacanțele cât și atomii interstițiali nu rămân permanent în locurile unde s-au format, ci se pot deplasa continuu ca efect al agitației termice. Atomii interstițiali sunt mai mobili decât vacanțele deoarece energia lor de deplasare este mai mică decât a vacanțelor.

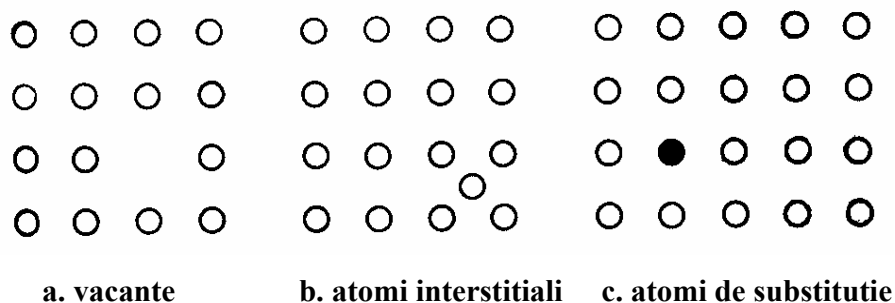


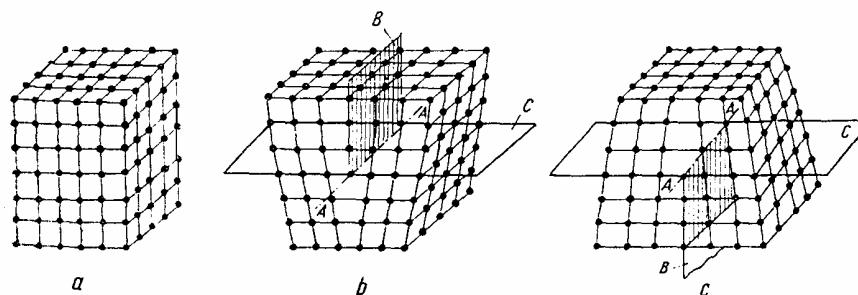
Fig.3.3

Imperfecțiunile liniare caracteristice structurii metalelor sunt dislocațiile . Aceste defecte explică mecanismul deformării plastice a metalelor. Dislocațiile sunt caracterizate prin direcția liniei dislocației și vectorul deplasării ei (vectorul Burgers).Pe baza acestor caracteristici dislocațiile se pot împărți în dislocații marginale și dislocații elicoidale.

Pentru a crea imaginea unei dislocații se consideră un cristal perfect din sistemul cubic, în care se introduce parțial un semiplan atomic suplimentar B(fig.3.4 b, c). Limita inferioară a planului B, definită de linia A-A, formează dislocația marginală care poate fi pozitivă(fig.3.4 b) sau negativă(fig.3.4 c). **Linia A-A se numește linie de dislocație.**

Alunecarea se produce întotdeauna în planul care conține dislocația marginală, plan ce poartă numele de plan de alunecare.

Dacă direcția de alunecare este paralelă cu linia dislocației, dislocația, se numește elicoidală sau în șurub (fig.3.5)[1].



a.cristal ideal, b.cristal cu dislocație marginală pozitivă, c.cristal cu dislocație marginală negativă

A-A linia de dislocație, B semiplanul atomic suplimentar, C planul care conține dislocația

Fig.3.4 Schema formării dislocației marginale:

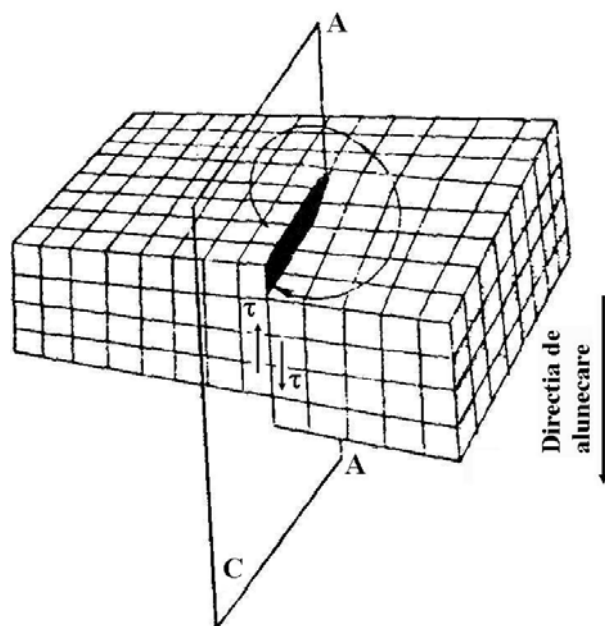


Fig.3.5 Schema dislocației elicoidale

Dislocația poate fi considerată ca o linie de demarcație între o porțiune de cristal care s-a deplasat pe un plan cristalografic în raport cu celălalt plan și porțiunea care nu a suferit încă o astfel de deplasare.

Deplasarea dislocațiilor în rețea poate avea loc în două moduri: prin alunecare și prin difuzie. Deplasarea prin alunecare a dislocațiilor este posibilă atât în cazul dislocațiilor marginale cât și în cel al dislocațiilor elicoidale. Deplasarea dislocațiilor se produce sub acțiunea tensiunilor interne sau externe ce acționează în planele de alunecare. Viteza de deplasare a dislocațiilor depinde de tipul rețelei cristalografice, de valoarea forțelor de legătură dintre atomi, de cantitatea de defecte de rețea respectiv de densitatea de dislocații. Mișcarea dislocațiilor prin difuzie este specifică numai dislocațiilor marginale. Față de deplasarea prin alunecare cea prin difuzie produce și un transport de masă care depinde de temperatură, concentrația vacanțelor și a atomilor interstițiali și de valoarea tensiunilor din rețeaua cristalină.

Problema sursei care conduce la formarea unui număr mai mare de dislocații în cristal, în timpul deplasării unei dislocații a fost lămurită de Frank și Read. Aceștia au demonstrat că o linie de dislocație care pe parcursul deplasării sub acțiunea tensiunii se blochează la capete (Fig.3.6a) este generatoare de alte dislocații. Prin blocare și prin creșterea treptată a tensiunii τ raza de curbura r a dislocației se modifică treptat, până când dislocația devine nestabilă (fig.3.6 b, c,d) formându-se în cele din urmă o buclă de dislocație care se extinde în planul de alunecare și o nouă dislocație DD' . O asemenea sursă se numește Frank-Read.

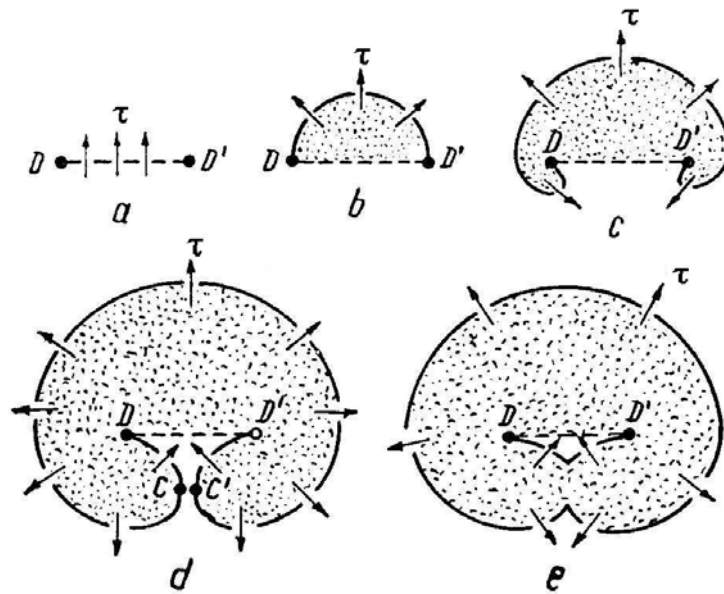


Fig.3.6

3.2. Deformarea plastică a monocristalelor

Deformarea plastică a monocristalelor constă din deplasarea unor părți ale acestora în raport cu altele, pe anumite plane ale rețelei cristalografice. În funcție de modul în care se produce deplasarea unor zone din cristal sub acțiunea unor forțe exterioare, deformarea plastică a monocristalelor se poate efectua prin alunecare sau maclare.

Deformarea plastică prin alunecare a monocristalelor

Sub acțiunea unei stări de tensiune, o serie de straturi de atomi din rețeaua cristalină a monocristalului, intră în fenomenul de alunecare, ca urmare a deplasării la început a dislocațiilor existente în cristal, pe anumite plane din rețea, caracterizate de o densitate de atomi maximă. După aceasta prin creșterea eforturilor de deformare, încep să apară deplasări ale dislocațiilor generatoare de deformări și pe alte plane ale rețelei cristaline, care au o densitate atomică mai mică.

Pe măsură ce dislocația se deplasează (Fig.3.7), în cristal se produce alunecarea din aproape în aproape a straturilor vecine de atomi, până ce dislocația ajungând la marginea cristalului dispare [5].

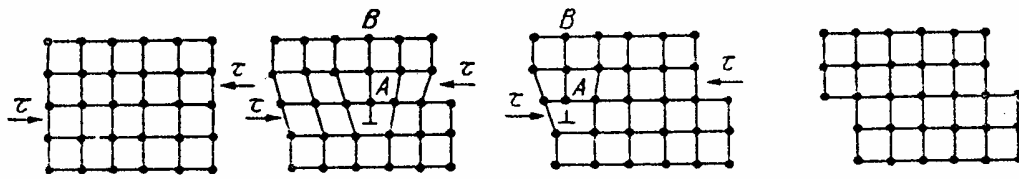


Fig.3.7

Efortul tangențial τ necesar deformării unui monocristal depinde de tipul de rețea cristalină a acestuia și de orientarea planelor de alunecare față de direcția tensiunii tangențiale. Astfel, dacă asupra monocristalului (cu secțiunea transversală A_0) se aplică o forță de deformare F , pe planul de alunecare cu secțiunea A , (plan a cărui normală face cu direcția forței un unghi α), și în direcția de alunecare (care formează cu direcția forței un unghi λ) va apare o tensiune tangențială (Fig.2.8) cu următoarea valoare:

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (3.1)$$

în care : T este forța ce apare pe planul de alunecare, cand asupra monocristalului se aplică forța de deformare F :

$$T = F \cos \lambda \quad (3.2)$$

Avand în vedere că:

$A = \frac{A_0}{\cos \alpha}$ rezultă valoarea tensiunii tangențiale pe planul de alunecare:

$$\tau = \frac{F \cos \lambda}{A_0} \cos \alpha = \sigma \cos \lambda \cos \alpha \quad (3.3)$$

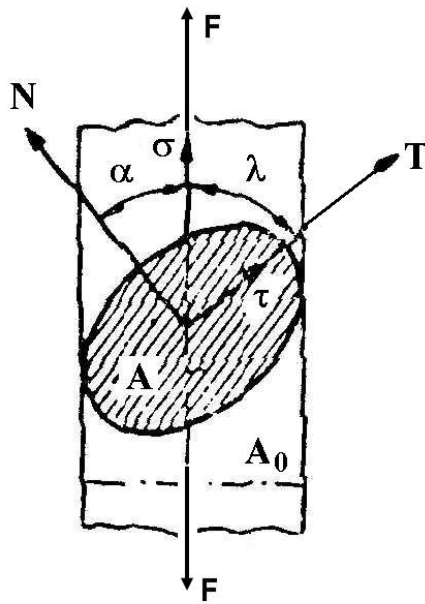


Fig.3.8

Efortul unitar τ va atinge valoarea critică de la care începe procesul de alunecare, atunci când tensiunea normală atinge valoarea rezistenței la deformare, care pentru starea de tensiune liniară, reprezintă tocmai limita de curgere σ_c :

$$\tau_{cr} = \sigma_c \cos \lambda \cos \alpha = \sigma_c \cos \lambda \sin \lambda \quad (3.4)$$

Rezultă din această relație că rezistența la deformare și respectiv forța de deformare depinde de poziția planului de alunecare față de direcția forței de deformare.

Deși există asemănări între modurile în care se produce deformarea plastică a monocristalelor din diferite metale sunt totuși și o serie de elemente specifice fiecărui tip de rețea cristalină în parte. Astfel fiecare tip de rețea cristalină este caracterizat de un număr diferit de plane și direcții de alunecare cu densitate atomică maximă.

Planele de alunecare împreună cu direcțiile de alunecare formează sistemele de alunecare. Analizându-se principalele tipuri de rețele cristaline prin prisma numărului de sisteme de alunecare și a densității atomice pe planele principale, s-a arătat că, o rețea C.F.C. necesită pentru o anumită deformare eforturi unitare mai mici decât alte metale sau aliaje care cristalizează în rețele C.V.C. și H.C. În același timp metalele ce cristalizează în rețea C.V.C. necesită pentru deformare eforturi mai mici decât metalele ce cristalizează în rețea H.C.

Deformarea plastică prin maclare a monocristalelor

Acest mecanism de deformare se produce mai ales în cazurile în care orientarea rețelei față de direcția tensiunii de deformare nu este favorabilă procesului de deformare prin alunecare. Deformarea prin maclare a monocristalelor reprezintă deplasarea unui întreg ansamblu de plane atomice vecine din rețea, în raport cu un anumit plan considerat fix, ocupând astfel o nouă poziție simetrică față de restul cristalului nedeformat.

Acest plan poartă numele de plan de maclare și este paralel cu planele din rețea pe care atomii au fost deplasați prin deformare. Prin acest mecanism de deformare zona din rețea deplasată va ocupa o poziție, care corespunde față de planul de maclare, imaginii în oglindă a zonei din rețea nedeformată (Fig.3.9).

Mecanismul de deformare prin maclare are loc de obicei în cazul metalelor cu un număr redus de sisteme de alunecare, cum este de exemplu cazul celor cu rețea de cristalizare H.C. și apare în special la temperaturi joase și viteze mari de deformare.

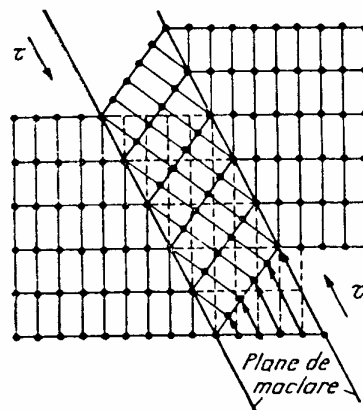


Fig.3.9

3. 3. Deformarea plastică a policristalelor

Agregatele policristaline fiind constituite dintr-un număr foarte mare de cristale, cu orientări diferite ale planelor de alunecare din rețea (Fig.3.10), cristale ce se găsesc într-o permanentă interacțiune, prin aplicarea asupra acestora a unor eforturi unitare, deformarea nu va avea loc simultan în toate cristalele. Deformarea fiecărui cristal nu se desfășoară liber, deoarece este condiționată de prezența limitelor dintre grăunți (cristale) și de procesele ce au loc în cristalele vecine. Deci deformarea agregatelor policristaline reprezintă rezultatul deformării fiecărui cristal în parte și a deplasării și rotirii relative a cristalelor unele față de celelalte.

În ce privește deformarea fiecărui cristal în parte, aceasta are loc ca și în cazul monocristalelor prin alunecare și maclare.

Starea de tensiune se modifică însă de la un cristal la altul, ca urmare a interacțiunii dintre aceștia și a orientării lor diferite.

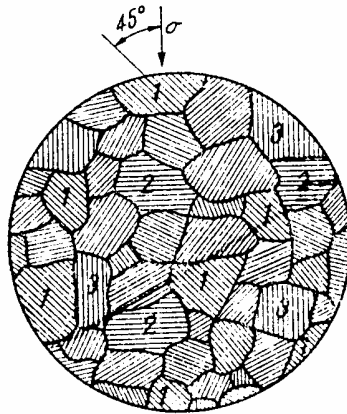


Fig.3.10

Deformarea prin alunecare va începe mai întâi în cristalele ale căror plane de alunecare au o înclinare de 45° față de direcția tensiunii de deformare (cristalele notate cu 1 în figura 3.10), având în vedere că pe aceste plane apar tensiuni tangențiale maxime.

În cristalele cu plane de alunecare dispuse perpendicular (grăunții notați cu 2) sau paralel (grăunții notați cu 3) față de direcția tensiunii de deformare, condițiile pentru deformarea prin alunecare lipsesc, deoarece pe aceste plane tensiunile tangențiale sunt nule.

În cristalele cu orientări intermediare ale planelor de alunecare vor începe mai întâi deformații elastice, care, pe măsură ce efortul de deformare crește, iar cristalele prin deplasări și rotiri se vor orienta preferențial, trec la deformarea plastică.

Efortul necesar pentru deformarea agregatelor policristaline va fi cu atât mai mare cu cât rețelele cristalografice ale grăunților vor avea un număr mai mic de sisteme de alunecare. De aceea agregatele policristaline formate din metale și aliaje cu rețea H.C., necesită eforturi pentru deformare superioare celor cu rețele C.V.C. și C.F.C.